

Preporuke za rješavanje ispita iz Matematike

Tijekom ocjenjivanja nacionalnih ispita i ispita državne mature, neovisno o razini, uvidjeli smo neke probleme pri rješavanju zadataka.

Ovdje želimo navesti nekoliko preporuka kako bismo pomogli pristupnicima izbjeći pogreške koje se uglavnom odnose na zaokruživanje brojeva, pojednostavljivanje izraza i crtanje grafova u koordinatnom sustavu.

O zaokruživanju brojeva

*Tijekom računanja podatke zadane u zadatku **ne treba** zaokruživati. Ako su rezultati konačni decimalni brojevi, **ne treba** ih zaokruživati (osim ako uputom u zadatku nije drugačije navedeno).*

Primjer 1. Slitina od koje se izrađuje kovanica od 50 lipa sastoji se od nikla i željeza. Omjer nikla prema željezu je 1:19. Masa kovanice od 50 lipa je 3.65 g. Koliko je grama željeza potrebno za izradbu jedne kovanice od 50 lipa?

Napomena 1. Rješenje zadatka je točno 3.4675 g i ne treba ga zaokruživati, primjerice, na 3, 3.5, 3.47.

Primjer 2. Veza između kilometara i milja dana je formulom $y = 1.609x$ gdje y označuje kilometre, a x milje. Koliko je kilometara 12.3 milja?

Napomena 2. Očekuje se da se račun provodi sa zadanom vrijednošću 1.609, a ne nekom približnom vrijednošću tog broja. Time se dobiva rezultat 19.7907 km koji također nije potrebno zaokruživati na manji broj decimala.

Vrijednosti trigonometrijskih funkcija treba zaokružiti na najmanje četiri decimale.

Primjer 3. U trokutu ABC je mjera kuta $\alpha = 55^\circ$, $\beta = 23^\circ$ i $|BC| = 17$ cm. Izračunajte duljinu stranice AC . Rezultat zaokružite na dvije decimale.

Napomena 3. Očekivani rezultat je 8.11 cm. Ovaj rezultat dobije se ako se vrijednosti funkcije sinus ne zaokružuju ili ako se zaokružuju na barem četiri decimale. Ako se sinusi kutova zaokružuju na tri decimale, dobiva se 8.12 cm, a ako se zaokružuju na dvije decimale, odstupanje od očekivanog rezultata je značajnije, tj. dobiva se 8.09 cm. Zaokruživanje vrijednosti trigonometrijskih funkcija na manje od četiriju decimala je potpuno neprihvatljivo.

Ako se u zadatku traži zaokruživanje na određeni broj decimala, to se odnosi na konačan rezultat. Međurezultati se tada računaju s točnošću zaokruživanja najmanje na **dvije decimale više** od traženog rezultata (primjerice, točnost rezultata na dvije decimale zahtijeva točnost međurezultata najmanje na četiri decimale).

Broj $\pi = 3.1415926535 8979323 \dots$ ima beskonačno mnogo decimala pa je prilikom računanja najbolje koristiti njegovu vrijednost s džepnog računala.

Primjer 4. Duljina hipotenuze pravokutnog trokuta je 9 cm. Izračunajte obujam (volumen) stošca koji nastaje rotacijom tog trokuta oko katete duljine 4 cm. Rezultat zaokružite na dvije decimale.

Napomena 4. Očekivani rezultat je 272.27 cm^3 . Međurezultat u zadatku je duljina druge katete, tj. $\sqrt{65}$ cm. Najbolje je dalje računati s tom točnom duljinom izraženom s pomoću korijena. Ako se broj $\sqrt{65}$ zaokružuje, valja ga zaokružiti na najmanje četiri decimale, tj. na 8.0623 kako bi konačni rezultat imao zahtijevanu točnost.

Ako se, primjerice, međurezultat $\sqrt{65}$ zaokružuje na dvije decimale kao 8.06 cm te broj π unosi kao 3.14, dobiva se rezultat 271.98 koji značajnije odstupa od očekivanog rezultata.

Primjer 5. Broj π s vašeg džepnog računala zaokružite na četiri decimale pa izračunajte vrijednost izraza $P = 2r\pi(r + 30.21)$ za $r = 2.154$.

Rezultat zaokružite na dvije decimale.

Napomena 5. Očekuje se postupak $P = 2 \cdot 2.154 \cdot 3.1416 \cdot (2.154 + 30.21) = 438.0147903\dots$. Rezultat treba zaokružiti na dvije decimale pa je jedini odgovor koji se priznaje 438.01. Ako se međurezultati zaokružuju na, primjerice, dvije decimale, konačan rezultat ne će biti 438.01.

Neki su brojevi zaokruženi prilikom zadavanja (veliki ili mali brojevi ili brojevi prikazani u znanstvenom zapisu), stoga su, u zadacima višestrukog izbora, ponuđena rješenja zaokružena.

Primjer 6. Masa Zemlje je $5.976 \cdot 10^{24}$ kilograma. Masa Zemlje jednaka je $3.137 \cdot 10^{-3}$ mase Jupitera. Kolika je masa Jupitera izražena u kilogramima?

- A. $1.9 \cdot 10^{21}$
- B. $1.9 \cdot 10^{25}$
- C. $1.9 \cdot 10^{27}$
- D. $1.9 \cdot 10^{31}$

Napomena 6. Podatci iz zadatka su približne vrijednosti prikazane u znanstvenom zapisu pa su i ponuđeni odgovori prikazani u znanstvenom zapisu koji je, u ovom slučaju, zaokružen na jednu decimalu.

Primjer 7. Ljudsko srce tijekom jednog dana otkuca oko 100 000 puta.

Koliko puta otkuca srce čovjeka tijekom 70 godina života?

- A. $2.6 \cdot 10^7$
- B. $2.6 \cdot 10^8$
- C. $2.6 \cdot 10^9$
- D. $2.6 \cdot 10^{10}$

Napomena 7. Račun se provodi s približnim vrijednostima: 100 000 otkucaja, 365 dana (ne razlikujemo prijestupnu godinu), 70 godina života (ne preciziramo kada) i dobije se: $100000 \cdot 365 \cdot 70 = 2.555 \cdot 10^9$. Iz tog je razloga i ponuđeni odgovor zaokružen, u ovom slučaju, na $2.6 \cdot 10^9$ otkucaja.

Primjer 8. Na zemljovidu mjerila 1:50 000 polumjer kruga iznosi 1.5 cm.

Kolika je površina koju taj krug predoduje u prirodi?

- A. 1.1 km²
- B. 1.8 km²
- C. 2.4 km²
- D. 3.5 km²

Napomena 8. Iz ponuđenih odgovora vidi se da se traži odgovor u km² zaokružen na jednu decimalu. Računom se dobiva $1.767145... \cdot 10^{10}$ cm², što zaokruženo daje 1.8 km².

O pojednostavljanju

U sljedećim primjerima dane su neke napomene vezane uz pojednostavljanje izraza, skraćivanje razlomaka i sl.

Ako je rezultat **racionalan broj** zapisan u obliku razlomka, treba ga napisati u obliku do kraja skraćenog razlomka (osim ako uputom u zadatku nije drugačije navedeno).

Primjer 9. Zadani su brojevi $a = 2$, $b = \frac{2}{3}$, $c = \frac{1}{2}$. Odredite broj $H = \frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}}$.

Napomena 9: Očekivani odgovor je $\frac{3}{4}$ ili 0.75. Odgovori napisani u neskraćenom

obliku, primjerice $\frac{6}{8}$, ili u obliku dvojnog razlomka, primjerice $\frac{3}{\frac{8}{2}}$, ili razlomka s

decimalnim brojevima u brojniku i/ili nazivniku, mada su točni, ipak nisu pojednostavljeni do kraja.

Primjer 10. Zadani su brojevi $a = \frac{18}{25}$ i $v = 6.3$. Odredite broj $V = \frac{1}{3}a^2v$.

Napomena 10. Očekivani odgovor je broj $\frac{3402}{3125} = 1.08864$. Razlomak $\frac{2041.2}{1875}$, iako je točan, nije prihvatljiv kao odgovor jer je brojnik zapisan kao decimalan broj.

Primjer 11. Izračunajte $\frac{\sqrt[3]{4+2}}{-81:3}$.

Napomena 11. Očekivani odgovor je **decimalni broj**. Ovdje je to iracionalni broj $-0.1328667056\dots$. Budući se u zadatku ne traži zaokruživanje na određeni broj decimala to je svako točno zaokruživanje na najmanje dvije decimale prihvatljiv odgovor. Primjerice -0.13 ili -0.133 ili -0.1328667056 .

Odgovor napisan u obliku razlomka, primjerice, $-\frac{359}{2700}$, nije prihvatljiv iako se

dijeljenjem brojnika i nazivnika dobiva približan broj očekivanom odgovoru. Jedino se racionalni brojevi zapisuju kao razlomci.

Ako je rezultat **kompleksan broj**, treba ga napisati u standardnom obliku tj. $a+bi$, $a, b \in \mathbf{R}$ (osim ako uputom u zadatku nije drugačije navedeno).

Primjer 12. Neka je $z=3+2i$. Koliko je $(iz\bar{z})^4$?

Napomena 12. Očekivani odgovor je 28561 ili 13^4 . Odgovori $(13i)^4$, $28561i^4$ i slično, mada su točni, nisu do kraja pojednostavljeni.

Primjer 13. Koliki je broj $z = \frac{(1-i)^8}{1+i}$?

Napomena 13. Očekivani odgovor je $z=8-8i$. Odgovor $z = \frac{16}{1+i}$, iako je točan, nije prihvatljiv jer nisu provedene sve naznačene računске operacije.

Kod sređivanja algebarskih izraza potrebno je zbrojiti monome istog stupnja, a algebarske izraze skratiti odgovarajućim faktorima.

Primjer 14. Izračunajte i sredite izraz $(a+2)(2a+3)$.

Napomena 14. Očekivani odgovor je $2a^2+7a+6$. Odgovor prikazan kao $2a^2+3a+4a+6$, iako je točan, nije pojednostavljen do kraja. Također, odgovor $2a^2+7a+6=0$ nije prihvatljiv jer je u zadatku zadan algebarski izraz, a ne jednadžba.

Primjer 15. Koji je rezultat oduzimanja $\frac{1}{a-3} - \frac{6}{a^2-9}$, za sve a za koje je izraz definiran?

Napomena 15. Očekivani odgovor je $\frac{1}{a+3}$. Odgovor prikazan kao $\frac{a-3}{a^2-9}$, iako je točan, nije pojednostavljen do kraja.

Primjer 16. Odredite jednadžbu pravca koji prolazi točkama $A(2,5)$ i $B(6,-2)$.

Napomena 16. Očekivani odgovor je $y = -\frac{7}{4}x + \frac{17}{2}$ ili neki drugi ekvivalentni oblik jednadžbe pravca (implicitni, segmentni). Odgovor $y-5 = -\frac{7}{4}(x-2)$, iako je točan, potrebno je srediti i pojednostaviti do kraja.

O crtanju grafova funkcija

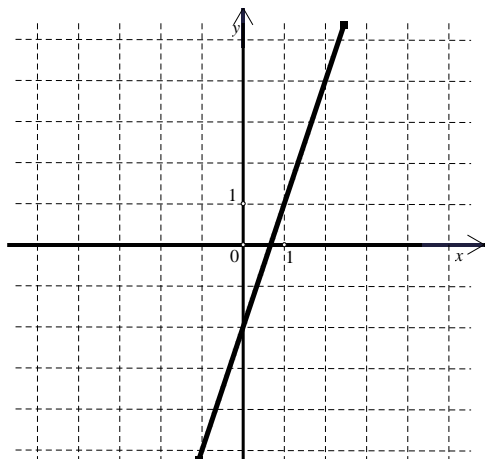
Dovoljno je nacrtati dio grafa koji je karakterističan za zadanu funkciju.

To najčešće uključuje sjecišta s osima i točke ekstrema (ako postoje).

Iz crteža se treba naslutiti domena funkcije, što znači da nije prihvatljiv graf koji završava na nekoj od tih karakterističnih točaka.

Primjer 17. Zadan je koordinatni sustav. Nacrtajte pravac čija je jednadžba $y = 3x - 2$.

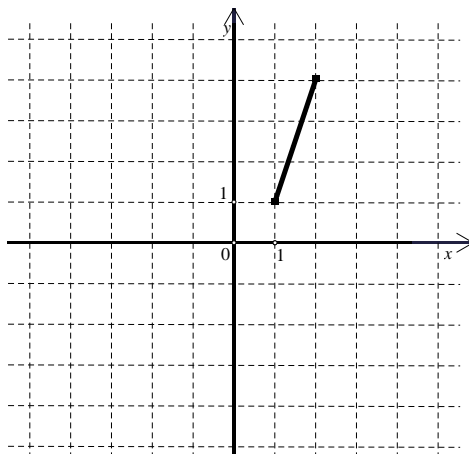
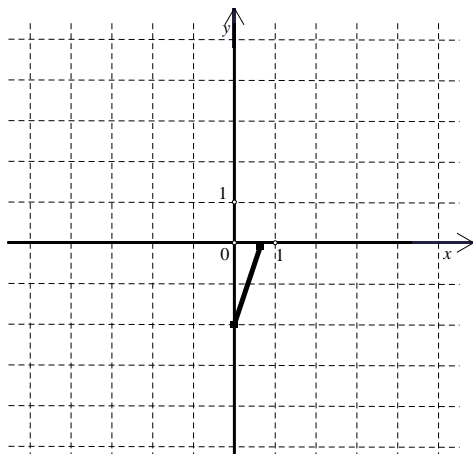
Napomena 17. Rješenje je prikazano na slici.



Na sljedećim slikama su primjeri nekih grafova koji nisu prihvatljivi kao odgovori.

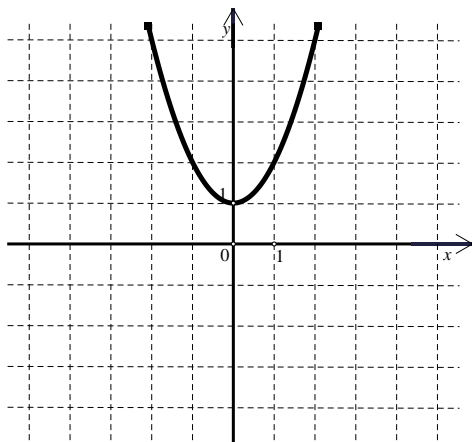
Dio grafa koji je nacrtan je točan, ali se ne vidi prirodna domena funkcije.

Pravac treba nacrtati preko cijelog zadanog koordinatnog sustava.

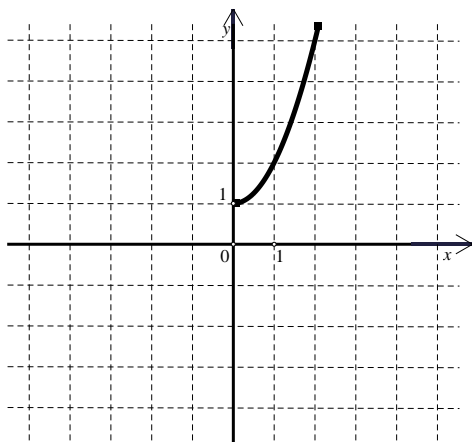


Primjer 18. Nacrtajte graf funkcije $f(x) = x^2 + 1$.

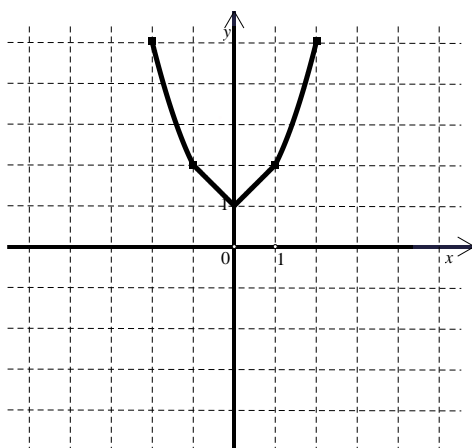
Napomena 18. Rješenje je prikazano na slici.



Na sljedećim slikama su primjeri nekih grafova koji nisu prihvatljivi kao odgovori.



Dio grafa koji je nacrtan je točan, ali se ne vidi karakterističan oblik niti domena funkcije.



Dio grafa je točan. Dio grafa na intervalu $\langle -1, 1 \rangle$ nije točan jer „šiljak“ nije karakterističan za parabolu.

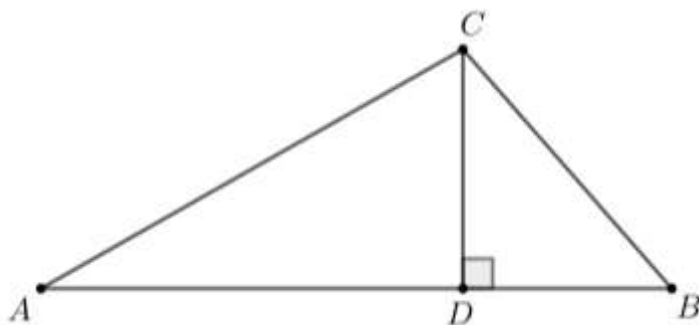
O geometriji

U formulacijama zadataka pojavljuju se pojmovi **skica** i **slika**. Treba ih razlikovati.

Skica prikazuje geometrijski objekt čije mjere kutova i duljine dužina ne moraju odgovarati zadanim vrijednostima.

Slika je nacrtana u koordinatnom sustavu i svi njeni elementi u skladu su s jediničnim duljinama tog koordinatnog sustava.

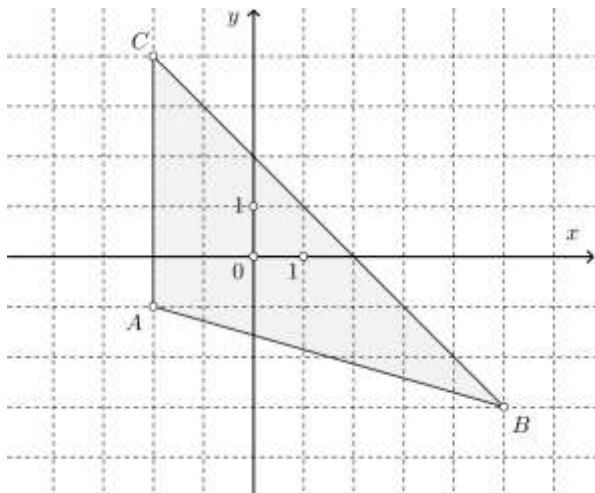
Primjer 19. Kolika je površina trokuta ABC prikazanoga na skici ako je $|AD|=10$ cm, $|CD|=3$ cm i $|BC|=5$ cm?



- A. 21 cm^2
- B. 26 cm^2
- C. 30 cm^2
- D. 75 cm^2

Napomena 19. Točan odgovor je A. Ovdje je zadana skica. Kada bismo zadane dužine ovog trokuta mjerili ravnalom, izmjereni brojevi ne bi odgovarali navedenim veličinama pa niti njihovi omjeri. Primjerice, nije nužno da je mjerenjem $|AD|$ dvostruko veća od $|BC|$. Zato se zadatci u kojima je zadana skica ne mogu rješavati mjerenjem ravnalom, nego računanjem iz zadanih podataka.

Primjer 20. Kolika je površina trokuta prikazanoga na slici?



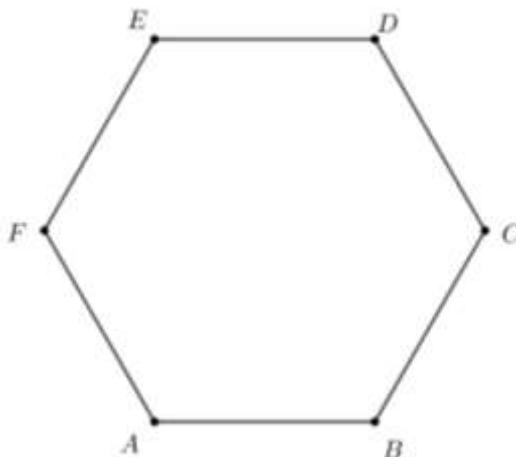
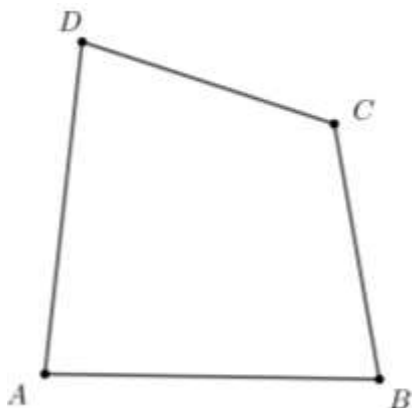
Napomena 20. Rezultat je 17.5 kvadratnih jedinica. Ovdje je zadana slika. Kod slike sve duljine odgovaraju zadanim, a mjerenje je provedeno jediničnim duljinama. U pravilu, ako u geometrijskim zadacima nisu navedene mjerne jedinice, onda se podrazumijeva da su duljine izražene u jediničnim duljinama, površine u kvadratnim jedinicama, a obujmi u kubnim jedinicama.

Ako se u geometrijskim zadacima navode vrhovi mnogokuta, onda se podrazumijeva da su redom navedeni vrhovi susjedni. Primjerice,

četverokut $ABCD$

ili

šesterokut $ABCDEF$



**Stručna radna skupina za matematiku
rujan, 2017.**