ŠESTEROKUT
HEXAGONE

2021

SADRŽAJ

OPIS - DESCRIPTION

Opis

Ovaj ogledni zadatak služi kako bismo vam predstavili drugačiji format ovogodišnjeg natjecanja i kako će ono izgledati. Također, želimo vam s njime demonstrirati u kojem smjeru bi vaša rješenja trebala ići. Rješenje ovdje naravno ne morate slijediti do slova, niti to očekujemo, no želimo vam pokazati što očekujemo. Točnije, želimo vidjeti fizikalni pristup, detaljan opis i vaše razmišljanje i intuiciju. Uz to, želimo da se u ovom zadatku i poigrate s jednom jako zanimljivom pojavom.

Description

The goal of this example is to show you the format of our competition and how it will look. In addition, we wish to show you the direction in which your solution should go. The solution presented here doesn't have to be followed precisely, it's just a guideline and contains the author's personal style. But, what we wish to see, and what the solution here expresses, is a physical approach, a description of your way of thinking and the intuition behind the problem. With this example, we also want you to play around with a very interesting effect that occurs in nature.

Part I

Primjer - exemple - example

HRVATSKI

Problem

Ptice lete, a ribe plivaju. No, neke ptice lete u jatima. Ako ste imali sreće, mogli ste vidjeti prizor kao na slici ispod, ogromnu količinu ptica koje lete u velikom jatu, izvodeći pritom nevjerojatne manevre. Jedan takav prizor možete vidjeti i ovdje.

No, nisu samo ptice koje pokazuju takav način ponašanja. Ribe, kukci pa čak i baketrije mogu stvoriti takve oblike kolektivnog gibanja. To je naša tema.

Slika 1: Ptice i ribe su neke životinja koje se mogu gibati u jatima

(a) Jato ptica

(b) Grupa riba odnosno plova riba

Možda ćete se zapitati kakve to veze ima s fizikom. Jedne od ranijih modela takvih gibanja su prvi počeli razmatrati fizičari, te je to i dalje aktivno područje u statističkoj fizici, biofizici i aktivnim tvarima, pa čak i vuče poveznice s magnetizmom.

1. pitanje [2 boda] Opišite svojim riječima, što mislite zašto dolazi do takvog ponašanja? Mislite li da odluka pojedinačne ptice može u potpunosti promijeniti smjer gibanja?

2. pitanje [2 boda] Što mislite, koji sve fizikalni faktori mogu ući u opis leta pojedinačne ptice i njenog odnosa s jatom?

Okrećemo se sad jednom vrlo pojednostavljenom modelu kojim ćemo opisati gibanje ptica. Gledati ćemo 2D slučaj unutar kvadrata konačne veličine koji ima periodične granice (npr. ako prijeđemo desni rub, vratit ćemo se natrag na lijevi rub).

Svaka ptica je određena svojim položajem x i y, brzinom v (koju možemo rastaviti na v_x i v_y) i orijentacijom q. Orijentacija je kut u odnosu na pozitivnu x os. Naš model je sljedeći: Znamo položaj i orijentaciju u trenutku t i zanimaju nas te veličine u idućem trenutku t + Dt jedne točno određene ptice. Te su veličine određene kao:

$$x(t + Dt) = x(t) + v_x Dt \tag{1}$$
$$y(t + Dt) = y(t) + v_y Dt \tag{2}$$
$$q(t + Dt) = \mathrm{Avg}_{r<R}\ q_r^{susjedi} + hz(t) \tag{3}$$

Gdje je $\mathrm{Avg}_{r<R}$ prosjek svih orijentacija susjednih ptica oko naše ptice koju gledamo, ali gledamo samo susjede unutar radijusa R. $z(t)$ je nasumični broj koji se mijenja u svakom trenu i predstavlja šum, a h je pozitivni broj koji predstavlja amplitudu tog šuma. Amplituda šuma određuje koliko dobro se ptice poravnavaju. Ako se primjerice ptice ne vide međusobno (npr. lete po mraku), onda je ta amplituda vrlo velika.

3. pitanje [2 boda] Za početak, zanemarimo šum i recimo da je $h = 0$. Što možete reći kako izgleda gibanje ptica u tom slučaju? Zašto? (Nije potrebno rješavanje jednadžbi, već je dovoljno opisno i intuitivno objašnjenje)

4. pitanje [2 boda] Recimo sad da je h jako velik. Kako izgleda njihovo ponašanje u tom slučaju? Zašto? (Također, intuitivno objašnjenje)

Okrenimo se sad simuliranju ovog gibanja. Simulacija s promjenjivim parametrima je dostupna ovdje. Ondje je moguće mijenjati amplitudu šuma h i broj ptica N. Nas će zanimati prelazak iz jednog režima u drugi, iz onog gdje vidimo jata (uređeno stanje) u ono gdje ona nestaju (neuređeno stanje).

5. pitanje [3 boda] Otvorite simulaciju i za fiksni broj ptica $N = 1000$, mijenjajte vrijednost amplitude šuma. Što primijećujete? Poklapa li se to sa zaključima iz prethodnih zadataka? (**Napomena**: ako šum odjednom promijenite s 0 na 20, potrebno je malo više vremena da se sustav prebaci u novo stanje, tako da pričekajte, tzv. vrijeme relaksacije. Pri svakoj promjeni parametara pričekajte 10-20s).

Neka je $\vec{s}_i$ vektor koji je pridružen ptici s rednim brojem i te ima isti smjer kao i njena brzina, odnosno ima istu orijentaciju kao i smjer gibanja te ptice, no duljina vektora je 1. Uvodimo sljedeći parametar $\vec{j}$ koji nazivamo vektorski *parametar reda*:

$$\vec{j} = \frac{1}{N} \mathring{a}_{i}^{N} \vec{s}_i \tag{4}$$
$$j = |\vec{j}| \tag{5}$$

U prvom redu smo jednostavno sumirali vektore po svim pticama. U drugom redu smo uveli skalarni parametar reda, j koji je jednostavno duljina prvog.

6. pitanje [3 boda] Što možete reći o skalarnom parametru reda j u uređenom i u neuređenom stanju? Koja je njegova fizikalna interpretacija?

7. pitanje [4 boda] Kako će se on mijenjati ako mijenjamo h od vrlo visokog broja prema 0? Kolika je njegova vrijednost kad je $h = 0$? (Ovdje tražimo matematički izvod i potvrdu simulacije).

8. pitanje [5 bodova] Prijeđite na simulaciju i uzmite $N = 5000$ (ili više, ali manje od 10000 za bolje rezultate). Za različite vrijednosti amplitude šuma h odredite j te nacrtajte graf ovisnosti j o h. Što primijećujete? (parametar reda sadrži šum u sebi te je potrebno gledat prosjek).

9. pitanje [2 boda] Okrenimo se sada prema gustoći odnosno broju ptica. Ako povećamo gustoću ptica, očekujete li da će se kritična vrijednost amplitude šuma, kad prelazimo iz uređenog u neuređeno, povećavati s gustoćom ili smanjivati? Zašto?

10. pitanje [5 bodova] Definiramo dvije duljine, `, koja označava prosječnu udaljenost koju neka ptica prijeđe prije sudara s drugom tzv. srednji slobodni put. Definiramo i `$_p$, prosječnu duljinu nakon koje ptica "zaboravi" svoju početnu orijentaciju, odnosno nakon koje u prosjeku je njen smjer potpuno drugačiji. Kako se te dvije duljine odnose u uređenom i u neuređenom stanju? Kako ` ovisi o gustoći ptica r_0? Ako je l_p µ v_0/h^2 odredite kako kritična vrijednost šuma ovisi o gustoći. Nacrtajte tzv. fazni dijagram (r, h), liniju ragraničenja između faza te označite gdje se koje stanje nalazi.

Ovdje smo vidjeli prikaz jedne pojave koju viđate skoro pa svaki dan, a to su fazni prijelazi. Najpoznatiji je primjer prelazak vode iz tekućine u paru. Fazni prijelazi se karakteriziraju, kao što smo vidjeli, parametrima reda te su oni vrlo bitni u njihovu opsivanju.

11.pitanje [3 boda] Koji je parametar reda u slučaju prelaska iz tekućine u plin? Ima li smisla uspoređivati takvu situaciju s pticama?

Rješenje

1. pitanje Uzroci ovog ponašanja su višestruki. Ptice, ribe i ostale životinje izvode mnogo radnji istovremeno dok se gibaju u jatu. Glavni mehanizam koji možemo prepoznati je poravnavanje, ptice se pokušavaju poravnati sa svojim susjedima, no mogu to učiniti samo za par okolnih ptica, ne za cijelo jato. Upravo takvo lokalno ponašanje je ključno, jer ne postoji generalna kohezija jata već isključivo lokalna. Nadalje, ptice imaju neku brzinu, čija se vrijednost, ne nužno smjer, također usklađuje s brzinom jata. Možemo prepoznati i ostale pojave, tipa ptice se ne smiju sudariti tako da postoji neka minimalna udaljenost između ptica ispod koje one ne idu i pokušavaju se udaljavati. Dakle istovremeno imamo mogućnost privlačenja i odbijanja, ovisno koliko su ptice udaljene.

Ovo je sustav koji je potpuno izvan stanja ekvilibrija, odnosno radi se o sustavu koji, iako se čini stabilan, zapravo nije ono što bismo nazvali potpuno stabilnim. Stabilnost traži da se sustav ne mijenja u vremenu. No, to očito ne vrijedi za ptice u jatu. Možemo onda zaključiti da male fluktuacije mogu dovesti do značajnijih promjena.

2. pitanje Faktori koji mogu ući u opis leta su brzina ptica, varijacije u brzini, smjer ptica, koliko se dobro one vide, broj ptica, neka srednja udaljenost između njih, eventualno čak otpor zraka...

3. pitanje Ako je šum odnosno $h = 0$, tada ne postoji nikakav izvor poremećaja orijentacije. Sve se ptice usmjeravaju prema prosjeku smjera svojih susjeda. To znači da se postepeno sve ptice usklađuju po smjeru te nakon dovoljno vremena će se sve gibati u nekom točno određenom smjeru (koji je određen početnom postavom ptica, odnosno o početnim uvjetima u kojima su se ptice našle).

4. pitanje U ovom slučaju, šum je toliko velik da se ptice ne usklađuju sa svojim susjedima i jednostavno se svaka ptica giba potpuno nasumično, sama za sebe, ne postoji

Slika 2: Parametar reda φ u ovisnosti o amplitudi šuma η za dvije razlicite gustoće tj. broj ptica.

smjer koji preferiraju. U nedostatku usklađivanja sa susjedima, ne postoji "sila" koja ih usmjerava.

5. pitanje Stavimo prvo $\eta = 0$. Vidimo da ptice pocinju formirati jata, ali da nakon dovoljno vremena se sve pocnu micati u nekom određenom smjeru. Kako povećavamo amplitudu, pocinju se formirati manja jata koja se gibaju u svojim smjerovima. Pojavljuju se lokalno koherentne strukture, no globalno one nisu usklađene. Ako povećamo amplitudu još više, dolazi do gibanja bez jata i grupica te svaka ptica leti nasumicno sama za sebe bez usklađivanja. To se poklapa s onime što smo prethodno pretpostavili.

6. pitanje U uređenom stanju, ptice se više manje gibaju zajedno i preferiraju, ako ne nu no globalno, onda bar lokalno i u nekom prosjeku neki određeni smjer. Ovaj parametar u biti predstavlja prosjecni smjer gibanja ptica. Ako one preferiraju neki smjer, onda će on biti razlicit od 0 tj. u uređenom stanju je $\varphi > 0$. U neuređenom stanju se ptice gibaju u svim smjerovima, više-manje podjednako. To znaci da je tada $\varphi = 0$.

7. pitanje Vodeći se razmišljanjem iz prethodnog zadatka, φ ima najveću vrijednost kad je $\eta = 0$, i onda će se smanjivati prema 0 kako povećavamo amplitudu šuma. Vrijednost u $\eta = 0$ je

$$\vec{\varphi} = \frac{1}{N}\sum_{i}^{N} \vec{s}_i \tag{6}$$

$$\varphi_x = \frac{1}{N}\sum_{i}^{N} s_{x,i} \quad \varphi_y = \frac{1}{N}\sum_{i}^{N} s_{y,i} \tag{7}$$

gdje smo rastavili $\vec{\varphi}$ na njegove x i y komponente, koje su svaka suma x i y komponenti vektora smjera ptica. Ako se sve ptice gibaju u istom smjeru, onda će sve njihove komponente vektora smjera biti iste tj. $s_{x,i}$ je jednak za sve i. Tu ćemo velicinu jednostavno prozvati s_x. Isto tako za y.

$$j_x = \frac{1}{N} \quad Ns_x \quad j_y = \frac{1}{N} \quad Ns_x \tag{8}$$

Tada imamo

$$j = |\vec{j}| = \sqrt{j_x^2 + j_y^2} = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = 1 \tag{9}$$

jer smo rekli da $\vec{s}_i$ ima duljinu 1. Ovaj rezultat se u potpunosti poklapa sa simulacijom.

8. pitanje Za svaku vrijednost šuma uzmemo 15 mjerenja parametra reda te uzimamo njegov prosjek, kao jedno mjerenje za dani h. To cinimo s korakom od 0.5 u h. Dobivamo graf na Slici2

Ono što mo emo primijetiti je da nakon neke određen vrijednosti šuma, parametar reda je efektivno 0 (do na grešku, zapravo 0 mo emo dobiti jedino u slucaju kada broj ptica te i prema beskonacno, kao i velicina našeg prozora u tzv. termodinamickom limesu. Kada radimo s konacnim brojem ptica u konacnom prostoru, vidjet ćemo tzv. " -nite size effects", što se ovdje vidi kroz cinjenicu da h ne postaje 0, a prijelaz u neuređeno stanje je glatko).

Ako se malo detaljnije zagledamo, i uzmemo $N = 10000$, vidjet ćemo da se nešto cudno događa pri prijelazu. Pogledajmo graf na Slici 3

Slika 3: Parametar reda j u ovisnosti o amplitudi šuma h za tri razlicite gustoće tj. broj ptica. Primjećujemo dva odskakanja na prijelazu između dva stanja.

Mo emo primjetiti da se parametar reda blago poveća i opet smanji, i tako dva puta. Ono što se događa je zapravo relativno novo otkrivena pojava te je i dalje tema koja se aktivno istra uje. Naime, ako se bolje zagledamo u simulaciju, vidjet ćemo da, iako postoji nered u cijelom gibanju, dolazi do strujanja ptica u nekom smjeru. Prisutno je kolektivno gibanje, kroz "more" kaoticnog gibanja. (Komentar: da je simulacija kvalitetnija i da imamo veći broj tocaka, vidjeli bismo zapravo linije ptica kako se gibaju kroz to more).

Slika 4: Fazni dijagram s linijom ragranicenja

9. pitanje Ako povećamo broj ptica, u prosjeku će biti veći broj susjeda oko neke ptice, to znaci da će se ona poravnavati s više njih, i taj utjecaj poravnavanja je jaci. To znaci da nam je potrebna veća amplituda šuma kako bismo prešli u neuređeno stanje. To znaci da vrijednost kriticne amplitude šuma raste s gustoćom tj. brojem ptica.

10. pitanje Ako imamo jako malu gustoću, tada će ptica preći jako dalek put prije nego se sudari s nekom pticom. Isto tako, ako je gustoća velika, stalno će se sudarati i ` će biti malen. Aproksimirati ćemo ptice s cesticama plina, što je relativno dobra aproksimacija, zato što kad su ptice u jatu, one se međusobno ne sudaraju već se mogu sudariti samo s drugim jatom. To onda znaci da cijelo jato mo emo zamijeniti cesticom koja se nasum-icno giba. Ako je pak stanje ptica neuređeno, onda se gibaju kao i cestice plina iz ocitih razloga. Pogledamo li recimo ovdje, mo emo vidjeti

$$` \mu \frac{1}{r_0} \tag{10}$$

U potpuno uređenom stanju, ptice nikad ne zaborave svoj smjer gibanja pa je on stoga vrlo velik, i slijedi $`_p > `$. U neuređenom stanju je $`_p < `$ jer ptice se gibaju nasumicno i vrlo brzo zaborave svoj pocetni smjer.

Slijedi stoga da je na prijelazu $`_p \quad `$ i da je $h_c \mu \sqrt{r_0}$. Fazni dijagram je prikazan na slici 4.

11.pitanje U slucaju plina i tekućine, temperatura nam predstavlja amplitudu šuma. Povećanjem temperature prelazimo iz tekućeg u plinovito stanje. Putem interneta, lako se mo e pronaći da je u tom slucaju parametar reda dan kao razlika gustoća između plinovitog i tekućeg stanja $j = Dr = r \quad r_{tekuina}$, gdje je r jednostavno gustoća te tvari na temperaturi koju gledamo. No, valja biti pa ljiv jer prešutno se uzima da se gustoća tekuće faze, $r_{tekuina}$ ne mijenja s temperaturom te je ona ista sve dok ne prijeđemo u plin. Vidimo tako, da je u tekućem stanju $j = 0$, dok u plinovitom je razlicit od nula.

Oba sustava pokazuju fazni prijelaz. No, u slucaju ptica postoji korektivni mehanizam na njihov smjer gibanja, što se ne događa u slucaju plina i tekućina te iz tog razloga ptice daju jedan puno bogatiji sustav. No, teorija faznih prijelaza tekućina bi se mogao primjeniti i na ptice.

Komentar: iva bića nisu jedini koji pokazuju ovakvo gibanje. Roboti i nanoroboti mogu pokazati ovakvo gibanje, no cak i cestice, tzv. "self-propelled particles" koje su posebno izrađene od dva materijala koji im pru aju odre đena zikalna i kemijska svojstva te se mogu koristiti za formiranje ovakvog gibanja. Podrucje zike koje istra uje ovakve pojave se zove aktivne tvari (engl. active matter) i ono je vrlo novo te se tek razvilo u posljednjih 20ak godina. Cak i male jednostavne stvari poput simulacije koju smo u ovom zadatku istra ili, mogu napraviti velike korake i to u potpuno nove znanstve smjerove. (npr. autor dok je smišljao zadatak nije uopće ocekivao da će prijelaz iz jata u neuređenost pokazati male brijegove, te tek nakon dovoljno istra ivanja je našao što oni znace i zašto se pojavljuju)

FRANÇAIS

Problème

Les oiseaux volent et les poissons nagent. Mais certains oiseaux volent en nuées. Vous avez peut-être eu la chance d'apercevoir des murmurations, ces rassemblements de nombreux oiseaux effectuant de formidables manœuvres, comme celle de l'image ci-dessous. Vous pouvez observer ce phénomène dans cette vidéo.

Mais les oiseaux ne sont pas les seuls à se comporter ainsi. Les poissons, les insectes et même les bactéries peuvent créer ces formes de comportements collectifs. C'est le sujet de ce problème.

(a) Une murmuration

(b) Un banc de poissons

Vous allez peut-être vous demander quel est le rapport avec la physique ? Une des premières modélisations de ce mouvement a été proposé par des physiciens et demeure encore aujourd'hui un sujet de recherche actif en physique statistique, biophysique et en matière active. Il existe aussi certains liens avec le magnétisme.

1. question [2 points] En utilisant vos propres termes, décrivez pourquoi, à votre avis, ce type de comportement se produit. Pensez-vous que la décision d'un seul individu de la nuée puisse changer complètement le mouvement de l'ensemble des oiseaux ?

2. question [2 points] À votre avis, quels sont les paramètres physiques qui permettent de décrire le vol de chaque oiseau et sa relation avec la nuée ?

Voyons maintenant un modèle simpli é permettant de décrire le mouvement des oiseaux. Nous allons nous intéresser au cas à deux dimensions, contenu dans un carré de taille ni avec des conditions périodiques au limites (c.-à-d. si un oiseau dépasse le bord gauche, il ressort du bord droit). Chaque oiseau est repéré par les coordonnées de sa position x et y, sa vitessev que l'on peut décomposer en ces composantesv$_x$ et v$_y$, et son orientation repérée par l'angle q repéré par rapport à l'axe des abscisses. Notre modèle est le suivant : connaissant la position et l'orientation au temps t, nous cherchons les valeurs de ces variables à l'instant d'après $t + \Delta t$ pour un oiseau en particulier

$$x(t+\Delta t) = x(t) + v_x \Delta t \tag{11}$$

$$y(t+\Delta t) = y(t) + v_y \Delta t \tag{12}$$

$$\theta(t+\Delta t) = \mathrm{Avg}_{r<R}\ \theta_r^{\mathrm{voisins}} + \eta\xi(t) \tag{13}$$

où $\mathrm{Avg}_{r<R}$ est l'orientation moyenne des oiseaux voisins de l'individu choisi, en ne considérant que les voisins contenus dans un cercle de rayon R. $\xi(t)$ est un nombre aléatoire dont la valeur change à chaque instant pour rendre compte d'un bruit. η est un nombre positif qui représente l'amplitude de ce bruit. L'amplitude du bruit détermine à quel point les oiseaux s'alignent entre eux. Par exemple, s'ils ne peuvent se voir parce que c'est la nuit, cette amplitude est très élevée.

3. question [2 points] Dans un premier temps, le bruit est négligé de telle sorte que $\eta = 0$. Pouvez-vous dire à quoi le mouvement des oiseaux va ressembler ? Pourquoi ? (Aucune résolution d'équation n'est demandée, donnez simplement une réponse descriptive et intuitive.)

4. question [2 points] Supposons maintenant que η est très grand. À quoi ressemble le mouvement des oiseaux dans ce cas ? Pourquoi ? (De la même façon que précédemment, une explication basée sur le raisonnement et l'intuition est demandée.)

Passons maintenant à la simulation du mouvement des oiseaux. Une simulation avec des paramètres ajustables est disponibles ici. Vous pouvez modifier l'amplitude du bruit η et le nombre d'oiseaux N et observer deux régimes : l'un correspondant à un état ordonné ou des nuées sont visibles, l'autre associé à un état désordonné où aucun comportement collectif n'est visible. Nous allons nous intéresser à la transition d'un état à l'autre.

5. question [3 points] Ouvrez la simulation et pour un nombre fixé d'oiseau $N = 1000$, modifier l'amplitude du bruit. Que remarquez-vous ? Cela confirme-t-il vos réponses aux questions précédentes ? (Remarque : si vous changez soudainement l'amplitude du bruit de 0 à 20, ou effectuez un changement important de l'amplitude, il faudra du temps pour que le système s'adapte au nouvel état : c'est que l'on appelle le temps de relaxation. Attendez simplement 10 à 20 secondes après chaque changement).

Appelons $\vec{s}_i$ le vecteur associé au i-ième oiseau. La direction de ce vecteur est la même que celle de la vitesse de l'oiseau (c.-à-d. la direction de son mouvement) mais la norme de ce vecteur vaut toujours 1. Nous introduisons maintenant le paramètre $\vec{\varphi}$ appelé paramètre d'ordre vectoriel :

$$\vec{\varphi} = \frac{1}{N}\sum_i^N \vec{s}_i \tag{14}$$

$$\varphi = |\vec{\varphi}| \tag{15}$$

La première ligne correspond simplement à la moyenne des vecteurs $\vec{s}_i$. La deuxième introduit le paramètre d'ordre scalaire φ qui correspond à la norme du vecteur défini avant.

6. question [3 points] Que peut-on dire du paramètre d'ordre scalaire dans l'état ordonné puis dans l'état désordonné ? Quelle est son interprétation physique ?

7. question [4 points] Comment le paramètre j va-t-il évoluer si on passe d'une grande valeur de h à 0 ? Quelle est sa valeur quand $h = 0$? (ici, une démonstration mathématique et une con rmation basée sur la simulation sont attendues.)

8. question [5 points] En repassant à la simulation, augmenter le nombre d'oisieau et choisir $N = 5000$ ou plus (mais moins de 11000 sinon la simulation est trop lente). Pour différentes valeurs de l'amplitude du bruit h, relever la valeur du paramètre d'ordre scalaire j et tracer le graphe de j en fonction de h. Que remarquez-vous ? (Les mesures du paramètre d'ordre sont bruitées : il faut les moyenner en réalisant plusieurs mesures.)

9. question [2 points] Intéressons-nous maintenant la densité d'oiseaux, c.-à-d. au nombre d'oiseaux. À votre avis, comment varie la valeur critique de l'amplitude du bruit pour laquelle le comportement des oiseaux passe d'un régime à l'autre quand on augmente la densité d'oiseaux ? Pourquoi ?

10. question [5 points] Nous introduisons dorénavant deux longueurs : la longueur l qui mesure la distance moyenne qu'un oiseau parcours avant d'en rencontrer un autre et la longueur l_p qui correspond à la distance moyenne après laquelle l'oiseau a oublié son orientation initiale, c.-à-d. la distance après laquelle l'orientation est complètement différente. Comparer ces deux distances dans le cas ordonné et dans le cas désordonné. Comment la longueur l est-elle reliée à la densité d'oiseaux r_0 ? Si l_p µ v_0/ h^2, comment l'amplitude critique du bruit dépend-elle de la densité ? Représenter sur le diagramme de phase (r, h), la courbe séparant les deux états en situant chaque état sur le diagramme.

Dans ce problème, npus avons vu un phénomène que vous observez en réalité tous les jours : la transition de phase. L'exemple le plus connu est sans doute la transition liquide-vapeur de l'eau. Comme on l'a vu, les transitions de phases sont caractérisées par des paramètres d'ordre qui sont très importants dans leur description.

11. question [3 points] Quel est le paramètre d'ordre utilisé dans une transition liquide-gaz ? Est-il raisonnable de comparer cette transition avec le cas des oiseaux ?

Solution

1. question Les raisons qui expliquent ce comportement sont multiples. Les oiseaux, les poisson et d'autres animaux font beaucoup de choses tout en bougeant à l'intérieur du groupe. Le principal mécanisme que l'on peut identi er est l'alignement : les oiseaux essaient de s'aligner avec leurs voisins mais ils ne peuvent le faire qu'avec les quelques individus autour d'eux mais pas avec l'ensemble de la nuée. C'est justement ce comportement local qui est la clé : il n'y a pas de cohésion générale de la nuée, seulement des cohésions locales qui amène à un comportement collectif. Ensuite, les oiseaux ont une vitesse dont la valeur, et pas forcément la direction, est ajustée à celle de la nuée. On peut aussi considérer d'autres effets : par exemple, les oiseaux peuvent s'entrechoquer donc ils préservent une certaine distance minimale entre eux. On a donc à la fois un comportement attractif pour l'alignement et un comportement répulsif quand ils sont trop proches.

C'est un système qui n'est pas à l'équilibre, et même s'il peut sembler l'être, il n'est pas stable. La stabilité implique que le système n'évolue pas dans le temps ce qui ne s'applique évidemment pas aux oiseaux. Nous pouvons donc conclure que même une

Slika 6: Évolution du paramètre d'ordre j en fonction de l'amplitude du bruit pour deux densités d'oiseaux, c.-à-d. deux nombres N d'oiseaux.

petite uctuation peut provoquer des changements importants : il est possible qu'un seul oiseau puisse altérer tout le mouvement complet de la nuée.

2. question Les paramètres physiques qui peuvent potentiellement entrer dans la description du problème sont la vitesse des oiseaux, les variations de vitesse, la direction des oiseaux, s'ils voient correctement ou non, le nombre d'oiseaux, une certaine distance moyenne entre eux, peut-être même la résistance de l'air...

3. question Si l'amplitude du bruit est nulle, $h = 0$, alors il n'y a aucune perturbation dans l'orientation. Cela signi e que tous les oiseaux se dirigent dans la direction moyenne de leurs voisins. Petit à petit, tous les oiseaux s'alignent et après un temps suf samment long, ils se déplacerons tous dans la même direction (déterminée par les positions et orientations initiales qu'ils avaient dans la nuée.)

4. question Dans ce cas, le bruit est tellement grand que les oiseaux ne s'alignent pas avec leurs voisins et évoluent simplement dans des directions aléatoires : il n'y a pas de direction privilégiée. Sans alignement, il n'y a pas de "force directrice".

5. question En choisissant d'abord $h = 0$, on voit que les oiseaux commencent à former des nuées, mais après un temps suf samment long ils bougent tous dans la même direction. En augmentant l'amplitude du bruit, ils forment des nuées plus petites qui bougent chacune dans leur propre direction. Des structures cohérentes locales apparaissent sans obtenir un alignement global. En augmentant encore davantage l'amplitude du bruit, les mouvements ne forment aucune structure ni alignement global : chaque oiseau vole individuellement. Ceci correspond à ce qui a été dit auparavant.

6. question Dans un état ordonné, les oiseaux bougent plus ou moins ensembles et préfèrent, au moins localement, une direction particulière. Ce paramètre représente et mesure la direction moyenne dans laquelle les oiseaux se déplacent. S'ils préfèrent une direction, il y aura davantage de vecteurs qui pointent dans cette direction et le

paramètre scalaire sera non nul. Dans un état désordonné, les oiseaux bougent dans toutes les directions : en moyenne $\varphi = 0$.

7. question En suivant le raisonnement de la question précédente, φ a la plus grande valeur quand $\eta = 0$ et va diminuer jusqu'à 0 quand on augmente l'amplitude du bruit. Si $\eta = 0$, alors

$$\vec{\varphi} = \frac{1}{N}\sum_i^N \vec{s}_i \tag{16}$$

$$\varphi_x = \frac{1}{N}\sum_i^N s_{x,i} \quad \varphi_y = \frac{1}{N}\sum_i^N s_{y,i} \tag{17}$$

où on décompose $\vec{\varphi}$ en ses composantes selon x et y. Si tous les oiseaux bougent dans la même direction, toutes leurs composantes seront les mêmes, c.-à-d. que les $s_{x,i}$ ont la même valeur pour tout i. En appelant simplement cette valeur s_x et en procédant de même selon y,

$$\varphi_x = \frac{1}{N} N s_x \quad \varphi_y = \frac{1}{N} N s_y \tag{18}$$

On a ensuite

$$\varphi = |\vec{\varphi}| = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = 1 \tag{19}$$

car la norme des $\vec{s}_i$ valait par définition 1. Ce résultat est confirmé par la simulation.

8. question Pour chaque valeur de l'amplitude du bruit, on réalise 15 mesures du paramètre d'ordre φ et on calcule la moyenne de ces valeurs. On effectue cela pour chaque valeur de η par pas de 0,5 pour obtenir la Fig. 6.

On peut remarquer qu'au-delà d'une certaine amplitude de bruit, le paramètre de bruit s'annule (à une erreur près, on remarquera certains effets qui proviennent du nombre fini d'oiseaux).

En regardant plus attentivement et en choisissant $N = 10000$, on remarque que quelque chose d'étrange se produit à la transition d'un état à l'autre. En observant le graphe de la Fig. 7, on remarque que le paramètre d'ordre augmente légèrement avant de s'annuler à nouveau. Cela se produit deux fois. Ce qui se produit n'a été découvert que récemment et les recherches se poursuivent sur le sujet. En observant attentivement ce qui se passe avec les oiseaux, on peut voir des courants d'oiseaux allant dans une direction, même si leur mouvement est désordonné. Il y a un mouvement collectif au sein d'une "mer" de mouvement chaotique. (Remarque : si la simulation était plus raffinée, avec plus d'oiseaux, différentes boites, on pourrait voir des lignes d'oiseaux traversant l'écran.

9. question En augmentant le nombre d'oiseaux, il y aura en moyenne plus de voisins autour de chaque oiseau, ce qui veut dire qu'il s'alignera avec plus d'oiseaux en moyenne. On peut dire que l'effet d'alignement est plus important. Autrement dit, il faudra une amplitude de bruit plus importante pour perturber l'alignement et passer à l'état désordonné. Il s'en suit que l'amplitude critique de bruit augmente avec la densité d'oiseaux, c.-à-d. le nombre d'oiseaux.

Slika 7: Évolution du paramètre d'ordre j en fonction de l'amplitude du bruit h pour trois densités différentes. On remarque deux rebonds après la transition entre les deux états.

10. question Si la densité d'oiseaux est très faible, les oiseaux parcourront une grande distance avant d'entrer en collision. Si la densité est importante, ils s'entrechoqueront souvent et la distance l sera petite. On peut approximer le comportement d'oiseaux par le mouvement de particules dans un gaz. C'est une approximation raisonnable car quand on a des nuées dans l'état ordonné, les oiseaux ne s'entrechoquent pas au sein d'une nuée. En revanche une nuée peut en rencontrer une autre. On peut ensuite considérer chaque nuée comme un oiseaux seul ou comme une particule de uide. Dans un état désordonné, chaque oiseau bouge aléatoirement et peut être assimilé à une particule se déplaçant aléatoirement dans un gaz. En consultant par exemple ce site, on peut voir que

$$` \mu \frac{1}{r_0}. \qquad (20)$$

Dans un état parfaitement ordonné, les oiseaux n'oublient jamais leur orientation, si bien que la longueur l_p est très grande et $l_p > l$. Dans un état désordonné, $l_p < l$ car les oiseaux se déplacent au hasard et oublient rapidement leur direction. On peut conclure qu'au point de transition, on a l_p l et h_c µ $\sqrt{r_0}$. On obtient le diagramme de phase visible sur la Fig. 8.

11. question Pour des gaz et des liquides, l'amplitude du bruit correspond à la température. En augmentant la température, on passe de l'état liquide à l'état gazeux. Une recherche internet permet de trouver que le paramètre d'ordre dans ce cas est la différence de densité (ou de masse volumique) entre celle du système et celle du liquide $j = Dr = r \quad r_{liquide}$, où r est la masse volumique de la substance à laquelle on s'intéresse. Ici, on suppose que la masse volumique du liquide $r_{liquide}$ ne change pas avec la température jusqu'à la transition de phase. Dans l'état liquide, on a donc $j = 0$, alors que dans l'état gazeux j est non nul.

Ces deux systèmes présentent des transitions de phase. Toutefois dans le cas des oiseaux, un mécanisme correctif altère la direction de leur mouvement, ce qui ne se produit pas dans le cas des gaz et des liquides. Pour cette raison, les oiseaux constituent un

Slika 8: Phase diagram with the separating line

système beaucoup plus riche, même si la théorie des transitions de phases peut toujours s'appliquer aux oiseaux et aux nuées.

Commentaire : Les êtres vivants ne sont pas les seuls à donner naissances à de tels mouvements. Les robots et nanorobots peuvent aussi se mouvoir de manière semblable, tout comme certaines particules appelées "particules automotrices" (*self-propelled particles*) qui sont fabriquées à l'aide de deux matériaux différents qui leurs donnent des propriétés physico-chimiques particulières. Le domaine de la physique qui s'intéresse à ces phénomènes est appelé *matière active* qui s'est développé rapidement au cours des 20 dernières années. Même de petites simulations relativement simples comme celle étudiée ici peuvent mener à des évolutions scientifiques importantes dans de nouvelles directions. (Par exemple, pendant la rédaction du problème, l'auteur ne s'attendais pas à observer les deux rebonds après la transition entre l'état ordonné et l'état désordonné. C'est seulement après avoir parcouru la littérature qu'il a découvert leur signification et la raison de leur apparition.)

ENGLISH

Problem

Birds y and sh swim. But, some birds y in ocks. If you were lucky, you could have seen the sight like the one on the image below, a huge amount of birds ying in a big ock, performing amazing maneuvers. One such sight you can see in the video here.

But it's not only birds who show this type of behaviour. Fish, insects and even bacteria can create such forms of collective behaviour. This is our subject.

(a) A ock of birds

(b) A school of sh

Maybe you'll ask, what does this have to do with physics? One of the earliest models of such movement was considered by physicists and it still remains an active subject of research in statistical physics, biophysics and in active matter, it also has some links with magnetism.

1. question [3 points] Describe in your own words, why do you think such behaviour occurs? Do you think that a decision of only one bird in the ock can completely change the movement of the collective?

2. question [3 points] What do you think are all the physical factors that can go into describing the ight of each bird and here relationship with the ock/group.

We move onto a simpli ed model with which we will describe the movement of the birds. We'll look at a 2D case within a square of nite size that has periodic boundaries (ie. if we cross the left edge we'll come out at the right edge).

Every bird is determined by its position x and y, speed v (which we can decompose into v_x and v_y) and orientation q. The orientation is the angle with respect to the x-axis. Our model is the following: We know the position and orientation at time t and we are interested in those variables in the next moment $t + Dt$ of one particular bird

$$x(t + Dt) = x(t) + v_x Dt \tag{21}$$

$$y(t + Dt) = y(t) + v_y Dt \tag{22}$$

$$q(t + Dt) = Avg_{r<R}\, q_r^{susjedi} + hz(t) \tag{23}$$

Where $Avg_{r<R}$ is the average orientation of all neighbouring birds around the particular bird we're looking at, but we focus only at neighbours within a certain radius R. $z(t)$ is a random number that changes at each moment of time and it represents a noise. h is a positive number that represents the amplitude of that noise. The amplitude of the noise determines how well the birds align themselves. If for example they can't see each other (e.g. if it's night) the that amplitude is very big.

3. question To start with, we neglect the noise and say that $h = 0$. Can you say what the movement of the birds looks like in that case? Why? (You don't need to solve any equation, just give an intuitive and descriptive answer)

4. question Let's say that h is very large. What does their behaviour look like in that case? Why? (Same as in the last question, just an intuitive description)

Let's turn to the simulation of the motion of the birds. A simulation with changeable parameters is available here. There you can change the amplitude of the noise h and the number of birds N. We'll be interested in the transition from one regime into the other, the one where we see ocks (ordered state) into the one where the ocks disappear (disordered state).

5. question Open the simulation and for a xed number of birds $N = 1000$, change and play around with the noise amplitude. What do you notice? Does it con rm the conclusions made in the previous questions? (Remark: if you change the noise from 0 to 20 suddenly, or make any large change in amplitude, it will take a long time for the system to adapt to the new state, the so-called relaxation time. So, just wait for 10 20s at each change).

Let $\vec{s}_i$ be the vector attached to the bird that is labeled with the number i, and this vector has the same direction as the velocity of the bird ie. it's direction of motion. But, the length of this vector is taken to be 1. We introduce the following parameter $\vec{j}$ which we call the vector order parameter

$$\vec{j} = \frac{1}{N}\sum_{i}^{N} \vec{s}_i \tag{24}$$

$$j = |\vec{j}| \tag{25}$$

In the rst line we simply summed up the vectors over all birds. On the second line we introduce the scalar order parameter„ j which is simply the length of the previous one.

6. question What can you say about the scalar order parameter j in the ordered and disordered state? What is its physical interpretation?

7. question How will j change if we change h from a very high number to 0? What is its value when $h = 0$? (we are looking for a mathematical demonstration as well as con rmation from the simulation)

8. question Now move to the simulation and take $N = 5000$ at least (or more, but less than 11000, otherwise the simulation is too slow). For different values of the noise amplitude h determine j and draw a graph of j in dependence on h. What do you notice? (the order parameter contains noise so we need to average it out over several measurements)

9. question Let's turn to the density of birds ie. the number of birds. If we increase the density, do you expect the critical value of noise amplitude, the point when we cross from one regime to another, to increase or decrease with density? Why?

10. question We now define two lengths, `, that measures the average distance a bird travels between collisions. We also define $`_p$, the average distance after which the bird forgets its initial orientation, meaning the average distance after which its orientation is completely different. How do these two distances compare in the ordered and disordered state? How does ` depend on the density of the birds r_0? If l_p µ v_o/h^2, then determined how the critical amplitude of the noise depends on the density. Draw the phase diagram (r,h), the separating line between the two states, and label where each state is in the diagram.

In this text we saw a phenomenon that you actually see everyday, and that's phase transitions. Probably, the most known example is the transition of water from liquid into steam. Phase transition are characterised, as we saw, by order parameters which are very important in their description.

11. question What is the order parameter used in the transition from liquid into gas? Does it make sense to compare that transition with the birds?

Solution

1. question The reasons behind this behaviour are multiple. Birds, fish and other animals are doing many different things at once while moving inside the flock. The main mechanism that we can recognize is alignment, birds try to align with their neighbours, but they can only do that with only a few birds around them and not the whole flock/collective. It's precisely that local behaviour that's key, because there is no general cohesion of the flock, but only local ones that lead to a general accord. Next, the birds have some velocity, who's value, and not necessarily direction, is also adjusted with that of the flock. We can also recognize other effects, like birds can't hit each other so there is some minimal distance between them that they don't cross and they try to distance themselves. So, at the same time we have a sort of attractive behaviour of alignment but also repulsive behaviour when they are too close.

This is a system that is not in equilibrium, and it's a system that, even though it seems stable, actually isn't and it's not what we would call completely stable. Stability requires that the system doesn't change in time. But, this obviously doesn't apply for birds in a flock. We can conclude then that an even small fluctuation can lead to significant changes, and that perhaps only one bird can change the total movement of the flock.

2. question The physical factors that could potentially enter the description are the velocity of the bird, variations in speed, the direction of the birds, how well they see, the number of birds, some average distance between them, perhaps even air resistance...

Slika 10: The order parameter j in dependence on the noise amplitude h for two different densities ie. bird numbers.

3. question If the noise amplitude is zero, $h = 0$, then there is no source of disturbance in orientation. That means all birds are directed toward the average of their neighbours. So step by step, all the birds are aligning themselves and after enough time they will all be moving in one particular direction (which is determined by the initial positions and directions of the birds, ie. the initial conditions they find themselves in)

4. question In this case, the noise is so large that the birds don't align with their neighbours and basically just move in random directions for themselves, there is no preferred direction. In absence of alignment, there is no "guiding force".

5. question We first put $h = 0$. We can see the birds start to form flocks, but after enough time they all move in a single direction. By increasing the noise amplitude, they form smaller flocks that each move in their own directions. They are local coherent structures that appear, but globally they are not aligned. If we increase the amplitude further, we get movement without structure and no globally alignment. Each bird flies on its own. This matches what we discussed in previous questions.

6. question In an ordered state, the birds are moving together more or less, and prefer, if not globally, at least locally some direction. This parameter represents and measure the average direction in which the birds move. If they prefer some direction, then there will be more vectors pointing in that directions, the vector order parameter will be pointing in that direction and the scalar one $j > 0$. In the disordered state the birds move in all directions in more or less equal numbers. That means $j = 0$

7. question Following the reasoning in the previous question, j has the largest value when $h = 0$, and it will decrease towards 0 as we increase the noise amplitude. The value at $h = 0$ is

$$\vec{\varphi} = \frac{1}{N} \sum_i^N \vec{s}_i \tag{26}$$

$$\varphi_x = \frac{1}{N} \sum_i^N s_{x,i} \quad \varphi_y = \frac{1}{N} \sum_i^N s_{y,i} \tag{27}$$

where we decompose $\vec{\varphi}$ in its x i y components, each of which are a sum of x and y components respectively of the direction vectors of the birds. If all the birds are moving in the same direction, then all of their components will be the same ie. $s_{x,i}$ is the same for all i. We'll call the value simply s_x. Same happens for y.

$$\varphi_x = \frac{1}{N} \quad N s_x \quad \varphi_y = \frac{1}{N} \quad N s_y \tag{28}$$

We then have

$$\varphi = |\vec{\varphi}| = \sqrt{\varphi_x^2 + \varphi_y^2} = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = 1 \tag{29}$$

because we said that $\vec{s}_i$ has length 1. This result is confirmed by the simulation.

8. question For each value of the noise we take 15 measurements of the order parameter and the take the average of those. We do that for each value of η moving with steps of 0.5. We recover the graph on Figure 10.

What we can notice is that after a certain value of the noise amplitude, the order parameter becomes basically 0. (up to an error, we actually might be noticing some effects coming from the fact that we have a finite number of birds).

If we look more closely and take $N = 10000$, we'll see something strange happen at the transition from one state to the other. Let's look at the graph on Figure 11

Slika 11: Parametar reda φ u ovisnosti o amplitudi šuma η za tri različite gustoće tj. broj ptica. Primjećujemo dva odskakanja na prijelazu između dva stanja.

We can notice that the order parameter increases slightly and then goes back to zero. It does that two times. What is happening is something that has been discovered only

Slika 12: Phase diagram with the separating line

recently and is still being researched. If we look closely at what's going on with the birds, we can see that, even though their movement is disordered, there is nevertheless a stream of birds going into one direction. There is collective motion through a "sea" of chaotic behaviour. (Comment: if the simulation was better, more birds, different box etc., we would actually see lines of birds going over the screen).

9. question If we increase the number of birds, on average there will be a larger number of neighbours around one bird, meaning that it will align itself with more of them on average. We can say that the alignment effect is larger. This means that we need a larger amplitude of noise to disturb that alignment and cross into the disordered state. It follows that the critical amplitude of noise increases with density ie. number of birds

10. question If we have a very small density, then the birds will travel a long distance before colliding with another. If the density is large, they will collide constantly and ℓ will be small. We can approximate the behaviour of birds with the movement of particles in a gas. This is a reasonable approximation, since when we have flocks in the ordered states, the birds don't collide within the flock, but a flock can collide with another flock. We can then consider each flock as a single bird or a particle of gas. In the disordered state, each bird moves randomly and can be see as a particle moving randomly in a gas. Looking for example here, we can see

$$\ell \propto \frac{1}{r_0} \tag{30}$$

In a completely ordered state, the birds never forget their orientations so ℓ_p is very large, and we have $\ell_p > \ell$. In a disordered state $\ell_p < \ell$ because the birds move at random and quickly forget their direction.

We can conclude then that at the transition point we have $\ell_p \approx \ell$ and that $h_c \propto \sqrt{r_0}$. The phase diagram is shown in Figure 12.

11. question In the case of gas and liquids, temperature represents the noise amplitude. Increasing the temperature, we cross from a liquid state into a gas state. Using the internet we can easily find that the order parameter in that case is the difference in densities between the gas and liquid state $j = Dr = r \quad r_{liquid}$, where r is simply the density of the substance we are looking ate. But we need to be careful, since we take that the density of the liquid, r_{liquid} doesn't change with temperature and stays the same until we cross into the gas state. We see that in the liquid state $j = 0$, while in the gas state it is different from 0.

Both system show a phase transitions. But, in the case of birds there is a corrective mechanism altering their direction of movement which doesn't happen in the case of gas and liquid. It is because of this reason that birds display a much richer system. But, the theory of phase transitions can still be applied to birds and flocks.

Comment: Living beings are not the only ones that exhibit this type of motion. Robots and nanorobots can also move in this manner, as well as particles called "self-propelled particles" that are made in a way using two different materials giving them special physical and chemical properties. The area of physics that investigates these phenomena is called *active matter* and is a relatively new field that has developed rapidly in the past 20 years. Even small and simple simulations like the one we covered there can lead to big steps in new scientific directions (for example, the author of this problem, when writing it did not expect at all the two bumps to appear after the transition from order to disorder, and only after going through additional literature found what they mean and why they are there)